نظرية الاحتمالات

وتطبيقاتها الادارية

د.زاهر بشير العبدو
باحث، كاتب ، مدرب متقدم معتمد من
منتدى قادة المستقبل / البورد البريطاني للمحترفين
CAMBRIDGE COLLEGE
Training, Educational & Consultancy Center
GLOBAL ACADEMY OF TRAINING&CONSULTING (GATC)
NNC Academy

Dr.Zaher B. Al-Abdo
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey
www facebook twitter youtube
Author, Trainer, consultant ?
Authorized & Advance Trainer TECC IBP

نظرية

الاحتمالات وتطبيقاتها

Probabilities and its Applications

مقدمة

كلمة "احتمال" هي كلمة ينطق بها الكثير من الناس، فبعض خبراء الأرصاد الجوية يقولون من المحتمل سقوط أمطار اليوم، احتمال ارتفاع في درجات الحرارة، وبعض خبراء البورصة يقولون احتمال ارتفاع قيمة الأسهم المتداولة في سوق المال لشركة معينة، خلال هذا اليوم، واحتمال نجاح طالب، واحتمال إصابة نوع معين من الفاكهة بنوع من البكتريا، وهكذا، يكثر نطق الأفراد بها وربما يجهلون معناها. فماذا تعني كلمة احتمال؟

يقصد بهذه الكلمة فرصة حدوث أو وقوع حادثة معينة، وتستخدم الاحتمالات في كثير من النواحي التطبيقية، مثل المجالات الاقتصادية، والتجارية، والزراعية، والطبية، والسلوكية، وغيرها، خاصة عند اتخاذ القرار في دراسات الجدوى، والتنبؤ بسلوك الظواهر المختلفة، ولكي يمكن فهم موضوع الاحتمال، وأهميته في النواحي التطبيقية، نقوم بعرض بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات.

٢/٧ بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمال

- **التجربة العشوائية** Randomized Experiment

هي أي عملية تتم يمكن تحديد كل النتائج الممكنة لها، ولكن لا يمكن مسبقا تحديد النتيجة التي ستظهر أو تحدث، ومثال على ذلك عند إلقاء قطعة عملة معدنية مرة واحدة، فإن النتائج الممكنة لها نتيجتان هما: "ظهور الصورة" ويرمز لها بالرمز H، أو "ظهور الكتابة" ويرمز لها بالرمز T، أي أن النتائج الممكنة هي: $\{H , T\}$، وقبل إلقاء القطعة ، لا يمكن تحديد أي من النتيجتين سوف تظهر.

- **فراغ العينة** Sample Space

هي مجموعة النتائج الممكنة للتجربة، ويرمز لها بالرمز S، ويرمز لعدد النتائج المكونة لفراغ العينة بالرمز $n(S)$، ومن الأمثلة على ذلك:

١- عند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة مرة واحدة، نجد أن فراغ العينة هو: $S:\{H , T\}$ ، وعدد النتائج هي: $n(S)=2$.

٢- عند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة مرتين (إلقاء قطعتين مرة واحدة)، فإن فراغ العينة يمكن الحصول عليه من خلال شجرة الاحتمالات كما يلي:

Email: zaherabdo@hotmail.com
http://zmils.com/
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey

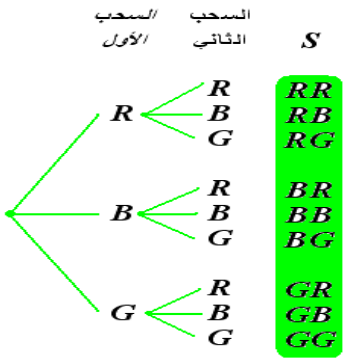
أي أن $n(S)=4$

٣- عند رمي زهرة نرد غير متحيزة مرة واحدة، فإن فراغ العينة هو مجموعة عدد النقاط التي تظهر على الوجه، وهي: $S:\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، أي أن : $n(S)=6$.

٤- عند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة عدد من المرات حتى نحصل على الصورة مرة واحدة، نجد أن التجربة هي عدد من المحاولات يتم إيقافها عندما نحصل على الصورة مرة واحدة ، إذا فراغ العينة هو :

$S:\{H, TH, TTH, TTTH,.....\}$، ويكون : $n(S)=\infty$.

٥- عند سحب كرتين بدون إرجاع من كيس به خمس كرات حمراء (red)، ثلاث كرات زرقاء (blue)، وكرتان خضراء (green)، نجد أن فراغ العينة هو:



أي أن: $n(S)=(10\times 9)=90$ ، (لأنها حالات غير متزنة).

٦- عند فرز صندوق به خمس وحدات من سلعة معينة، يكون فراغ العينة لعدد الوحدات المعيبة هو ..... واجب منزلي

- **الحادث** Event

هو فئة جزئية من النتائج المكونة لفراغ العينة، ويرمز للحادث بحرف من الحروف الهجائية [A, B, C,...] ، وينقسم الحادث إلي نوعين هما:

١- حادث بسيط Simple Event : وهو الذي يحتوي على نتيجة واحدة من النتائج المكونة لفراغ العينة.

٢- حادث مركب Component Event : ويشمل نتيجتين أو أكثر من النتائج المكونة لفراغ العينة، أي أن الحادث المركب يمكن تقسيمه إلى حوادث بسيطة.

Email: zaherabdo@hotmail.com
http://zmils.com/
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey

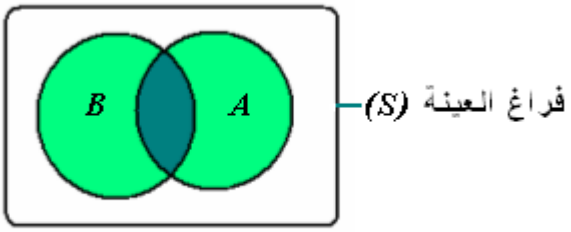
ويرمز لعدد النتائج المكونة للحادث بالرمز $n(A)$, $n(B)$,... وهكذا.

فعند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة مرتين ، وعرف الحادث A بأنه ظهور الصورة مرتين ، والحادث B ظهور الصورة مرة واحدة على الأقل ، نجد أن فراغ العينة في هذه الحالة هي S:{HH, HT, TH, TT} ، وبالنسبة للحادث A فهو حادث بسيط ، يشمل نتيجة واحدة هي A:{HH} ، أي أن n(A)=1 ، أما الحادث B فهو حادث مركب يشمل ثلاث نتائج هي B:{HT, TH, HH} ، أي أن n(B)=3 ، وهذا الحادث يمكن تقسيمه إلى أحداث بسيطة .

- **الاتحاد** (∪) Union

يعبر اتحاد الحادثان A , B عن وقوع أحدها على الأقل، وبمعنى آخر وقوع الأول أو الثاني أو كلاهما، ويعبر عن ذلك رياضيا $(A\cup B)$ أو $(A\ or\ B)$، ويمكن الاستعانة بشكل "فن" Ven. Diagram كما يلي:

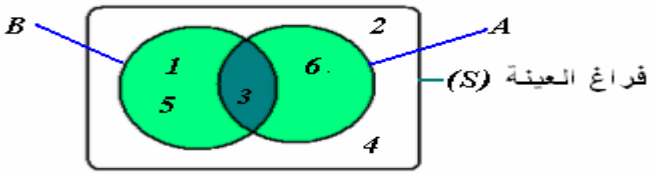
شكل (٧-١)



الجزء المظلل يعبر عن الاتحاد $(A\cup B)$

ومثال على ذلك ، عند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة ، وعرف الحادث A بأنه ظهور وجه يقبل القسمة على 3 ، والحادث B بأنه ظهور عدد فردي، يلاحظ أن:

B:{1,3,5}, A:{3,6}, S:{1,2,3,4,5,6} ، ويكون اتحاد الحادثان A , B هو: $(A\cup B):\{1,3,5,6\}$ ، ويعبر عن ذلك في شكل Ven كما يلي:



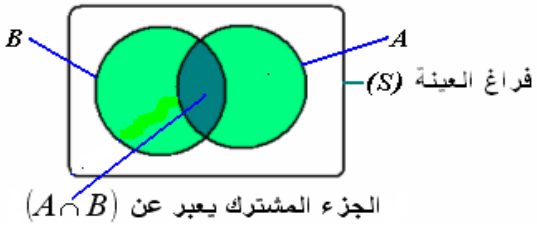
$(A\cup B):\{1,3,5,6\}$

- **التقاطع** (∩) Intersection

يعبر تقاطع الحادثان A , B عن وقوع الاثنان في آن واحد ، ويشمل كل النتائج المشتركة بين الحادثين، ويعبر عن ذلك رياضيا $(A\cap B)$ أو $(A\ and\ B)$ ، ويظهر ذلك في شكل "فن" كما يلي :

شكل (٧-٢)

Email: zaherabdo@hotmail.com
http://zmils.com/
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey

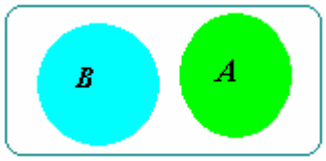


ففي المثال السابق ، نجد أن $(A\cap B):\{3\}$.

- **الأحداث المتنافية** Mutually Exclusive evens

يقال أن الحادثان A, B متنافيان، إذا كان وقوع أحدها ينفي وقوع الحدث الآخر، بمعنى استحالة وقوعهما في آن واحد، ومن ثم يكون نتيجة تقاطع الحادثان المتنافيان هي الفئة الخالية ويرمز لها بالرمز ϕ أي أن $A\cap B=\phi$ ، ويمكن تمثيلها بشكل " فن " كما يلي:

شكل (٧-٣)



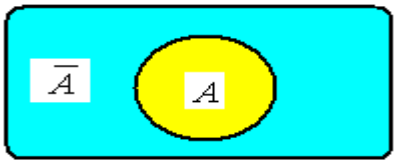
$(A\cap B)=\phi$ لا توجد نتائج مشتركة

- **الحادث المكمل** Compliment Event

الحادث المكمل للحادث A هو الذي ينفي وقوعه، بمعنى آخر هو الحادث الذي يشمل كل نتائج التجربة باستثناء النتائج المكونة للحادث A، ويرمز للحادث المكمل بالرمز $\overline{A}$ ، ومن ثم نستنتج أن : $(A\cap\overline{A})=\phi$, $(A\cup\overline{A})=S$

كما هو مبين بالشكل التالي:

شكل (٧-٤)



مثال (٧-١)

ألقيت قطعة عملة غير متحيزة ثلاث مرات، وعرفت الأحداث التالية:

الحادث A ظهور الصورة مرتين.

الحادث B ظهور الصورة مرة واحدة.

الحادث C ظهور الصورة في الرمية الأولى.

والمطلوب:

Email: zaherabdo@hotmail.com
http://zmils.com/
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey

١- إيجاد الأحداث الخاصة بالاتحاد:

$$A\cup B\ ,\ A\cup C\ ,\ B\cup C\ ,\ A\cup B\cup C$$

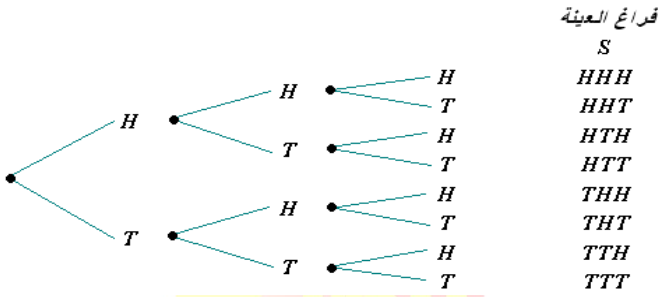
٢- إيجاد الأحداث الخاصة بالتقاطعات:

$$A\cap B\ ,\ A\cap C\ ,\ B\cap C\ ,\ A\cap B\cap C$$

٣- أوجد الحادث $\overline{B}$

الحـل

- فراغ العينة لهذه التجربة هو:



$$n(S)=8$$

- وأما الأحداث هي:

$$A:\{HHT,HTH,THH\},\ B:\{HTT,THT,TTH\},\ C:\{HHH,HHT,HTH,HTT\}$$
$$n(A)=3 \qquad n(B)=3 \qquad n(C)=4$$

١- الأحداث الخاصة بالاتحاد:

$$(A\cup B):\{HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH\}\ ,\ n(A\cup B)=6$$
$$(A\cup C):\{HHT,HTH,THH,HHH,HTT\}\ ,\ n(A\cup C)=5$$
$$(B\cup C):\{HHH,HHT,HTH,HTT,THT,TTH\}\ ,\ n(B\cup C)=6$$
$$(A\cup B\cup C):\{HHH,HHT,HTH,HTT,THT,TTH,THH\},n(A\cup B\cup C)=7$$

٢- الأحداث الخاصة بالتقاطع:

$$(A\cap B):\phi\ ,\ n(A\cap B)=0$$
$$(A\cap C):\{HHT,HTH\}\ ,\ n(A\cap C)=2$$
$$(B\cap C):\{HTT\}\ ,\ n(B\cap C)=1$$
$$(A\cap B\cap C):\phi\ ,\ n(A\cap B\cap C)=0$$

٣- إيجاد $\overline{B}$:

$$(\overline{B}):\{HHH,HHT,HTH,THH,TTT\}\ ,\ n(\overline{B})=5$$

Email: zaherabdo@hotmail.com
http://zmils.com/
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey

٣/٧ طرق حساب الاحتمالات

يعتمد حساب الاحتمال من الناحية النظرية على أسس وقواعد الرياضيات، ويعتبر هذا النوع من الاحتمال هو العنصر الأساسي في الاستدلال الإحصائي، ولكن في المجال التجريبي تعتمد الاحتمالات على النتائج الفعلية لمشاهدات التجربة، وعلى تكرار الحادث محل الاهتمام، فإذا رمزنا لاحتمال وقوع الحادث A بالرمز $P(A)$، فإن طريقة حساب هذا الاحتمال تتحدد وفقا لنوع الاحتمال، وهما نوعان:

- **الاحتمال التجريبي** Empirical probability: ويعبر عنه بالتكرار النسبي، ويحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$P(A)=\frac{f(A)}{n} \qquad (٧-١)$$

حيث أن: n هو مجموع التكرارات(العدد الكلي للمشاهدات)، $f(A)$: هو تكرار الحادث A،

فإذا تم إلقاء قطعة عملة غير متحيزة 500 مرة، وتم ملاحظة عدد مرات ظهور كل وجه، ولخصت كالتالي:

الوجه (Face)	H	T	SUM
عدد مرات ظهور الوجه	260	240	500

وإذا كان المطلوب حساب احتمال ظهور الصورة H، يمكن تطبيق المعادلة رقم (٧-١)، والتي تعتمد على التكرار النسبي، أي أن :

$$P(H)=\frac{f(H)}{n}=\frac{260}{500}=0.52$$

- **الاحتمال النظري** Theoretical Probability: وهو الذي يعتمد في حسابه على أسس وقواعد الرياضيات، والتي تستخدم في تحديد عدد النتائج الممكنة للتجربة، وعدد النتائج الممكنة لوقوع الحادث، ومن ثم يحسب هذا النوع من الاحتمال ، بتطبيق المعادلة التالية:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)} \qquad (٧-٢)$$

حيث أن: $n(S)$ هو عدد النتائج الممكنة للتجربة، $n(A)$ هو عدد النتائج الممكنة لوقوع الحادث A، فعند إلقاء قطعة عملة غير متحيزة مرة واحدة ، نجد أن فراغ العينة هو: $S:\{H, T\}$ ، أي أن عدد النتائج الممكنة هي: $n(S)=(2)^1=2$، وإذا كان الحادث A هو ظهور صورة ، نجد أن $A:\{H\}$ ، أي أن عدد النتائج المكونة للحادث A هي: $n(A)=1$ ، ويكون احتمال وقوع الحادث A هو:

Email: zaherabdo@hotmail.com
http://zmils.com/
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{2}=0.5$$

- **العلاقة بين الاحتمال التجريبي و الاحتمال النظري:** عند زيادة عدد المحاولات n يقترب الاحتمال التجريبي من الاحتمال النظري، أي أن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(A)}{n}=\frac{n(A)}{n(S)} \qquad (٣-٧)$$

فعند زيادة عدد مرات رمي قطعة العملة، فإن التكرار النسبي للصورة سوف يقترب من القيمة (0.5)، وهي قيمة الاحتمال النظري لظهور الصورة عند رمي قطعة العملة مرة واحدة.

- **النتائج المتشابهة:** إذا أجريت تجربة، وكانت كل نتيجة من النتائج الممكنة للتجربة لها نفس الفرصة في الظهور، بمعنى أن كل نتيجة لها احتمال هو $(1/n(S))$ ، تسمى هذه النتائج بالنتائج المتماثلة أو المتشابهة، فعند إلقاء زهرة نرد متزنة مرة واحدة، نجد أن فراغ العينة هو S:{1,2,3,4,5,6} ، واحتمال كل نتيجة هو (1/6) ، وعند إلقاء الزهرة مرتين نجد أن عدد نتائج فراغ العينة هو: $n(S)=6^2=36$ نتيجة، وهي:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

وهذه النتائج متماثلة، واحتمال كل نتيجة هو (1/36).

- **النتائج غير المتماثلة:** هي النتائج التي تحدث عند تكرار محاولة، بحيث أن احتمالات نتائج كل محاولة غير متساوي، ومن ثم لا تتساوى احتمالات نتائج التجربة، فعند سحب كرتين مع الإرجاع بطريقة عشوائية من كيس به ثلاث كرات حمراء (R)، وكرتان تحملان اللون الأبيض (W)، نجد أنه في كل سحب يكون احتمال ظهور كرة حمراء هو 3/5 ، واحتمال ظهور كرة بيضاء هو 2/5 ، ومن ثم يكون نتائج فراغ العينة، واحتمال كل نتيجة في حالة سحب كرتين هو:

Email: zaherabdo@hotmail.com
http://zmils.com/
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey

يلاحظ أن احتمال كل نتيجة يختلف عن(1/4) ، فهذه الحالات غير متزنة.

٤/٧ بعض قوانين الاحتمالات Probability Laws

هناك بعض القوانين التي يمكن تطبيقها لحساب الاحتمالات المختلفة، وهي:

- **قانون جمع الاحتمالات** Addition Law

إذا كان لدينا الحادثان A , B ، فإن الاحتمال $P(A\cup B)$ ، يمكن استنتاج معادلته كما يلي:

$$P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}$$
$$=\frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(S)}$$
$$=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$
$$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

إذا:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \qquad (٣-٧)$$

وفي حالة ثلاث أحداث A , B , C ، يمكن استنتاج معادلة الاتحاد $P(A\cup B\cup C)$ ، وهي:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C) \qquad (٤-٧)$$

وعندما تكون الأحداث متنافية، فإن احتمالات التقاطعات تساوي أصفار، ويكون:

Email: zaherabdo@hotmail.com
http://zmils.com/
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\ ,$$
$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C) \qquad (٥-٧)$$

مثال(٧-٢)

عند إلقاء زهرة نرد غير متحيزة مرتين، فأوجد ما يلي:

١- احتمال ظهور وجهين متشابهين.

٢- احتمال ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10.

٣- احتمال ظهور وجهين متشابهين أو مجموع نقاطهما 10.

٤- احتمال ظهور وجهين مجموع نقاطهما 7 أو 10.

الحـــل:

نتائج فراغ العينة هي:

S

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$n(S)=36$

١- بفرض أن الحادث A هو حادث ظهور وجهين متشابهين، فإن:

$A:\{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (4,4)\ (5,5)\ (6.6)\},\ n(A)=6$

ويكون احتمال ظهور وجهين متشابهين هو:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

٢- بفرض أن الحادث B هو حادث ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10، فإن:

$B:\{(4,6)\ (5,5)\ (6,4)\},\ n(B)=3$

ويكون احتمال ظهور وجهين متشابهين هو :

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

٣- لحساب احتمال ظهور وجهين متشابهين أو (or) مجموع نقاطهما 10 ، تستخدم المعادلة (٧-٣)، حيث أن:

$$P(A)=\frac{1}{6}\ ,\ P(B)=\frac{1}{12}$$

وأما التقاطع $(A\cap B)$ فيعبر عن ظهور وجهين متشابهين و مجموعهما 10 يمكن حسابه كما يلي:

Email: zaherabdo@hotmail.com
http://zmils.com/
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey

$$(A\cap B):\{(5,5)\}\ ,\ n(A\cap B)=1$$
$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{1}{36}$$

ومن ثم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

٤- بفرض أن الحادث C هو حادث ظهور وجهين مجموع نقاطهما 7، والحادث B هو حادث ظهور وجهين مجموع نقاطهما 10 ، نجد أن:

$$B:\{(4,6)\ (5,5)\ (6,4)\}\ ,\ C:\{(1,6)\ (2,5)\ (3,4)\ (4,3)\ (5,2)\ (6,1)\}$$
$$n(B)=3 \qquad n(C)=6$$
$$P(B)=3/36 \quad ، \quad P(C)=6/36$$

يلاحظ أن الحادثين $C,\ B$ حادثين متنافيين، لذا تستخدم المعادلة (٧-٥) في حساب الاحتمال المطلوب كما يلي:

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{3}{36}+\frac{6}{36}$$
$$=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

- **قانون الاحتمال الشرطي** Conditional probability

يستند هذا الاحتمال على فرصة وقوع حادث، إذا توافرت معلومات عن وقوع حادث آخر له علاقة بالحادث الأول، كاحتمال نجاح الطالب في مادة الإحصاء إذا علم أنه من الناجحين في مادة الاقتصاد، وكاحتمال استخدام المزرعة لنوع معين من السماد، إذا علم أنه يقوم بزراعة محصول معين، وكاحتمال أن الخريجي يعمل بالقطاع الخاص، إذا علم أنه ممن تخرجوا من قسم معين من أقسام كلية الزراعة، والأمثلة على ذلك كثيرة.

فإذا كان الحادث B حادث معلوم، والحادث A حادث آخر يراد حساب احتمال وقوعه، بمعلومية الحادث B ، فإن هذا الاحتمال يحسب بتطبيق المعادلة التالية:

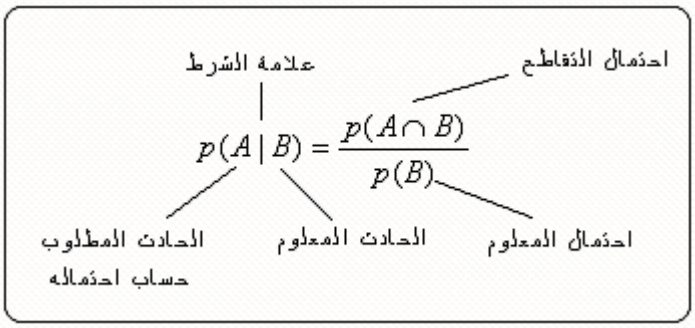
$$p(A\mid B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)} \qquad (٧-٦)$$

ويعرف الاحتمال $p(A\mid B)$ بقانون الاحتمال الشرطي، ويقرأ "احتمال وقوع الحادث A بمعلومية الحادث B"، أو يقرأ "احتمال وقوع الحادث A بشرط وقوع الحادث B"، كما يمكن حساب احتمال وقوع الحادث B بمعلومية الحادث A ، وذلك بتطبيق المعادلة التالية:

$$p(B\mid A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)} \qquad (٧-٧)$$

Email: zaherabdo@hotmail.com
http://zmils.com/
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey

ومن المعادلة (٧–٦)، (٧–٧) يلاحظ أن الاحتمال الشرطي هو نسبة حادث التقاطع بين إلى الحادث المعلوم، حيث أن :



مثال (٧–٣)

فيما يلي توزيع تكراري لعينة عشوائية حجمها 100 من خريجي الكلية في العامين الماضيين، حسب التخصص، ونوع المهنة:

التخصص \ المهنة	عمل حكومي	قطاع خاص	عمل حر	Sum
اقتصاد زراعي	15	5	10	30
علوم أغذية	8	17	10	35
علوم تربة	12	10	13	35
Sum	35	32	33	100

فإذا اختير أحد الخريجين بطريقة عشوائية، احسب الاحتمالات التالية:

١– ما احتمال أن يكون من خريجي قسم الاقتصاد و يعمل بالقطاع الخاص.

٢– ما احتمال أن يكون ممن يعملون بالحكومة أو من خريجي قسم علوم الأغذية.

٣– ما احتمال أن يكون من خريجي قسم علوم الأغذية أو من قسم علوم التربة.

٤– إذا علم أن الفرد من خريجي قسم عوم الأغذية، ما احتمال أن يكون ممن يعملون عملا حرا.

الحل:

أولا: نرمز لنوع المهنة بالرمو A، ولنوع التخصص بالرمز B ، كما هو مبين بالجدول التالي:

التخصص \ *المهنة*		*عمل حكومي* A_1	*قطاع خاص* A_2	*عمل حر* A_3	*Sum*
اقتصاد زراعي	B_1	*15*	*5*	*10*	*30*
علوم أغذية	B_2	*8*	*17*	*10*	*35*
علوم تربة	B_3	*12*	*10*	*13*	*35*
Sum		*35*	*32*	*33*	*100*

ثانيا: التكرار في كل خلية يعبر عن عدد الخريجين الذين ينتمون لقسم معين و يعملون في مهنة معينة، أي يعبر عن عدد تكرارات حوادث التقاطع الممكنة $A \cap B$.

Email: zaherabdo@hotmail.com
http://zmils.com/
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey

١- حساب احتمال أن يكون من خريجي قسم الاقتصاد و يعمل بالقطاع الخاص.

$$P(B_1 \cap A_2) = \frac{f(B_1 \cap A_2)}{n} = \frac{5}{100} = 0.05$$

٢- حساب احتمال أن يكون ممن يعملون بالحكومة أو من خريجي قسم علوم الأغذية.

$$P(A_1 \cup B_2) = p(A_1) + P(B_2) - P(A_1 \cap B_2)$$

$$= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} - \frac{8}{100} = \frac{62}{100} = 0.62$$

٣- حساب احتمال أن يكون من خريجي قسم علوم الأغذية أو من قسم علوم التربة.

هذان حادثان متنافيان، لأن تخرج الفرد من أحد الأقسام ينفي تخرجه من الأقسام الآخرى، وبمعنى آخر استحالة أن الفرد تخرج من قسمين في آن واحد، لذا يكون احتمال اتحادهما هو:

$$P(B_2 \cup B_3) = p(B_2) + P(B_3)$$

$$= \frac{35}{100} + \frac{35}{100} = \frac{70}{100} = 0.70$$

٤- إذا علم أن الفرد من خريجي قسم عوم الأغذية، ما احتمال أن يكون ممن يعملون عملا حرا، هذا احتمال شرطي، المطلوب هنا " حساب احتمال أن الفرد ممن يعملون عملا حرا A_3 بشرط أنه من خريجي قسم علوم أغذية B_2 ، أي أن الاحتمال المطلوب هو:

$$p(A_3 \mid B_2) = \frac{p(A_3 \cap B_2)}{p(B_2)} = \frac{\left(\frac{10}{100}\right)}{\left(\frac{35}{100}\right)} = \frac{10}{35}$$

واجب منزلي:

الجدول التالي يبين عدد الوحدات السليمة، والتالفة من الخبز العربي بعد ثلاث أيام من تاريخ الإنتاج في أحد مراكز التموين التي تتعامل مع ثلاث مخابز هي : ***(C , B , A)*** .

	عدد الوحدات السليمة	عدد الوحدات التالفة	الإجمالي
مخبز A	36	24	60
مخبز B	60	63	123
مخبز C	54	33	87
الإجمالي	150	120	270

إذا اختيرت وحدة من الخبز بطريقة عشوائية، فأوجد الآتي:

١- ما احتمال أن تكون من إنتاج المخبز B ؟

٢- ما احتمال أن تكون تالفة ؟

٣- إذا كانت الوحدة سليمة ، ما احتمال أن تكون من إنتاج المخبز C ؟

٤- ما احتمال أن تكون الوحدة من إنتاج المخبز A أو تكون تالفة ؟

Email: zaherabdo@hotmail.com
http://zmils.com/
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey

٥- إذا كانت الوحدة من إنتاج المخبز A، ما احتمال أن تكون تالفة ؟

- **قانون ضرب الاحتمالات** Probability Multiplying Law

ويعكس هذا القانون احتمال وقوع الأحداث معا، أي احتمال التقاطعات، فإذا كان A , B ، حادثان يمكن وقوعهما معا، فإن الاحتمال $P(A\cap B)$ يمكن حسابه كحاصل ضرب احتمالين، هما:

$$\begin{aligned} & P(A\cap B) = P(B)\ P(A|B) \\ \text{or} \quad & P(A\cap B) = P(A)\ P(B|A) \end{aligned} \qquad (٨-٧)$$

مثال (٧-٤)

إذا كانت نسبة مزارع الخضروات التي تستخدم أسلوب معين للتسميد 60%، وإذا كان نسبة المبيعات من إنتاج الخضروات المسمد 70%، بينما نسبة المبيعات من الخضروات غير المسمدة 80%، إذا اختيرت أحد المزارع التي تنتج الخضروات عشوائيا ، فأوجد الآتي:

١- ما احتمال أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد؟
٢- إذا علم أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد، ما احتمال أن تبيع إنتاجها؟
٣- ما احتمال أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد وتبيع إنتاجها؟
٤- ما احتمال أن هذه المزرعة ممن لا يستخدمون أسلوب التسميد و تبيع إنتاجها؟

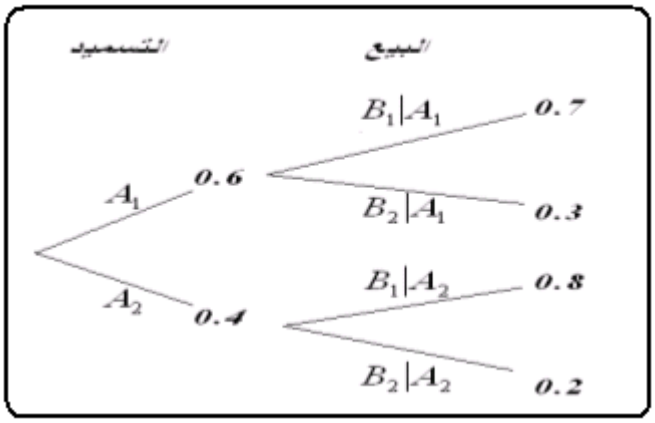
الحل

إذا فحصنا حال المزرعة المسحوبة، نجد أننا نتعامل مع نتيجتين متعاقبتين هما:

النتيجة الأولي ولها حالتان: {المزرعة تستخدم طريقة التسميد (A_1) أو المزرعة لا تستخدم (A_2) }

النتيجة الثانية ولها حالتان: { المزرعة تبيع الإنتاج (B_1)، أو المزرعة لا تبيع الإنتاج (B_2) }

لذا يمكن استنتاج شجرة الاحتمالات للحصول على النتائج الكلية كالتالي:



Email: zaherabdo@hotmail.com
http://zmils.com/
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey

وفيما يلي حساب الاحتمالات:

١- احتمال أن المزرعة تستخدم أسلوب التسميد هو:

$$P(A_1) = 0.6$$

٢- إذا علم أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد، فإن احتمال أن تبيع إنتاجهاهو:

$$P(B_1|A_1) = 0.7$$

٣- احتمال أن هذه المزرعة تستخدم أسلوب التسميد وتبيع إنتاجها عبارة عن احتمال وقوع حادثتان معا (B_1 and A_1)، لذا يحسب هذا الاحتمال بتطبيق المعادلة (٧-٨) كما يلي:

$$P(A_1 \cap B_1) = P(A_1)\ P(B_1|A_1)$$
$$= (0.6)(0.7) = 0.42$$

٤- احتمال أن المزرعة لا تستخدم أسلوب التسميد وتبيع إنتاجها هو:

$$P(A_2 \cap B_1) = P(A_2)\ P(B_1|A_2)$$
$$= (0.4)(0.8) = 0.32$$

- **الأحداث المستقلة** Independent Events

إذا كانت الحادثتان A , B يمكن وقوعهما معا، ولكن وقوع أحدهما ليس له علاقة بوقوع أو عدم وقوع الحادث الآخر، فإن الاحتمال $P(A \cap B)$ يمكن التعبير عنه كالتالي:

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B) \qquad (٧-٩)$$

وفي هذه الحالة يقال أن الحاثتان A , B مستقلتان.

مثال(٧-٥)

إذا كان نسبة المزارع التي تنتج خضروات 60% ، ونسبة المزارع التي تنتج فاكهه 75%، ونسبة المزارع التي تنتج الخضروات و الفاكهة 50%، أوجد الآتي:

١- ما احتمال أن مزرعة ما تنتج فاكهة أو خضروات؟

٢- ما احتمال ألا تنتج المزرعة الفاكهة ؟

٣- هل انتاج المزرعة للفاكهة مستقل عن إنتاجها للخضروات؟

الحل:

بفرض أن A حادث يعبر عن "المزرعة تنتج خضروات "، B هو حادث يعبر عن " المزرعة تنتج فاكهة"، فإن:

$$P(A) = 0.6 \quad , \quad P(B) = 0.75 \quad , \quad P(A \cap B) = 0.5$$

ويكون:

Email: zaherabdo@hotmail.com
http://zmils.com/
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey

١- احتمال أن مزرعة ما تنتج فاكهة أو خضروات هو:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=(0.6)+(0.75)-0.5=0.85$$

٢- احتمال ألا تنتج المزرعة الفاكهة هو:

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0.75=0.25$$

٣- لمعرفة ما إذا كان إنتاج المزرعة للفاكهة مستقل عن إنتاجها للخضروات يمكن تطبيق المعادلة (٧-٩)

$$P(A\cap B)=0.5\ ,\ P(A)\ P(B)=(0.6)(0.75)=0.45$$

وحيث أن : $P(A\cap B)\neq P(A)\ P(B)$ ، فإن إنتاج المزرعة للفاكهة (A)، غير مستقل عن إنتاجها للخضروات (B).

مثـال(٧-٦)

إذا كان الحادثان $A\ ,\ B$ حادثان مستقلان ، وكان $P(A)=0.6\ ,\ P(B)=0.5$ ، فأوجد الاحتمال $P(A\cup B)$.

الحـل:

بما أن الحادثان $A,\ B$ مستقلان، إذا:

$$P(A\cap B)=P(A)\ P(B)$$
$$=(0.6)(0.5)=0.3$$

ويكون احتمال $P(A\cup B)$ هو:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=0.6+0.5-0.3=0.8$$

المصدر: جامعة الملك سعود

Email: zaherabdo@hotmail.com
http://zmils.com/
Tel: +9 0539 681 28 21 Turkey